

i stosując wzór (111.5) do całki (111.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (111.7) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos \varphi} \varrho^3 d\varrho \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10} \cos^5 \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{10}.
 \end{aligned}$$

**Zadanie 112.** (s. 143 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Należy obliczyć całkę  $I$  postaci

$$(112.1) \quad I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

gdzie obszar  $V$  ograniczony jest powierzchniami

$$(112.2) \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 2$$

Ze względu na obszar całkowania przejdziemy do współrzędnych cylindrycznych.

**Uwaga.** Przechodząc w całce postaci

$$(112.3) \quad I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

do współrzędnych cylindrycznych danych wzorami

$$(112.4) \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

oraz uwzględniając, że Jakobian odwzorowania ma postać

$$(112.5) \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\varrho, \varphi, \cdot)} = \varrho$$

całkę  $I$  daną wzorem (112.3) możemy zapisać w postaci

(112.6)

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z) \cdot \varrho d\varphi d\varrho dz$$

Paraboloida

(112.7)

$$x^2 + y^2 = 2z$$

przecina się z płaszczyzną

(112.8)

$$z = 2$$

wzdłuż okręgu o równaniu

(112.9)

$$x^2 + y^2 = 4$$

wobec tego obszar  $V$  zapisany za pomocą współrzędnych ma postać

(112.10)

$$V = \{(\varrho, \varphi, z) : 0 \leq \varrho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\varrho^2}{2} \leq z \leq 2\}$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych w całce

(112.11)

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

otrzymujemy

(112.12)

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \varrho^3 d\varrho \int_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int_0^2 \varrho^3 \left(2 - \frac{\varrho^2}{2}\right) d\varrho = \frac{16}{3}\pi.$$

**Zadanie 113.** (s. 143 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Przedstawiając obszar  $V$  w postaci

$$(113.1) \quad V = \left\{ 0 \leq z \leq h, \sqrt{\frac{z}{b}} \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{a}}, \frac{z}{\beta} \leq x \leq \frac{z}{\alpha} \right\},$$

otrzymujemy

(113.2)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2 dx = \frac{1}{3}(\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left( a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) \int_0^h z^{\frac{7}{2}} dz \\ &= \frac{2}{27}(\alpha^{-2} - \beta^{-2}) \left( a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) h^{\frac{9}{2}}. \end{aligned}$$

**Zadanie 114.** (s. 143 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Należy obliczyć całkę

$$(114.1) \quad I = \iiint_V xyz dx dy dz$$

gdzie obszar  $V$  ograniczony jest powierzchniami

$$\begin{aligned} (114.2) \quad & x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0 \\ & z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2 \\ & y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n) \end{aligned}$$

Dokonyamy zamiany zmiennych w całce (114.1) według wzorów

$$(114.3) \quad xy = u, \quad y = vx, \quad z = z$$

wówczas otrzymamy

$$(114.4) \quad I = \iiint_V x(u, v) y(u, v) z \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, z)} \right| du dv dz,$$

przy czym

(114.5)

$$a^2 \leq u \leq b^2, \quad \alpha \leq v \leq \beta, \quad \frac{u(v+v^{-1})}{n} \leq z \leq \frac{u(v+v^{-1})}{m},$$

$$x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}, \quad y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, z)} = \frac{1}{2v}.$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych dostajemy

(114.6)

$$I = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} \int_{\frac{u(v+v^{-1})}{n}}^{\frac{u(v+v^{-1})}{m}} z dz = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \int_{a^2}^{b^2} u^3 du \int_{\alpha}^{\beta} \left( v + \frac{1}{v} \right)^2 \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \int_{\alpha}^{\beta} \left( v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3} \right) dv$$

$$= \frac{1}{16} (m^{-2} - n^{-2}) (b^8 - a^8) \left( \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^{-2}}{2} - \frac{\beta^{-2}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{32} (m^{-2} - n^{-2}) (b^8 - a^8) \left( (\beta^2 - \alpha^2) (1 + \alpha^{-2} \beta^{-2}) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

**Zadanie 115.** (s. 143 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Oznaczamy, przez  $V$  domknięty obszar

$$(115.1) \quad V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z\}$$

który określa domkniętą kulę

$$(115.2) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}.$$

Objętość tej kuli jest równa

$$(115.3) \quad V = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

Możemy zatem napisać

$$(115.4) \quad f_{sr} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Przechodząc w całce (115.4) do współrzędnych sferycznych według wzorów

$$(115.5) \quad \begin{aligned} x &= \varrho \sin \varphi \cos \theta + \frac{1}{2}, & y &= \varrho \sin \varphi \sin \theta + \frac{1}{2}, & z &= \varrho \cos \varphi + \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi, & 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

oraz biorąc pod uwagę, że równanie granicy obszaru w tych współrzędnych przyjmuje postać

$$(115.6) \quad \varrho^2 = \frac{3}{4}$$

otrzymujemy, że całka (115.4) przyjmuje postać

$$(115.7) \quad \begin{aligned} f_{sr} &= \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \varrho^2 \left( \frac{3}{4} + \varrho^2 + \varrho(\sin \varphi(\sin \theta + \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi) \right) d\varrho = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \left( \frac{\varrho^3}{4} + \frac{\varrho^5}{5} + \frac{\varrho^4}{4} \cos \varphi \right) \bigg|_{\varrho=0}^{\varrho=\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \left( \frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{160} \right) \sin \varphi d\varphi = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{32} \left( 1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

**Zadanie 116.** (s. 143 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Należy, korzystając z twierdzenia o wartości średniej, oszacować całkę

$$(116.1) \quad \begin{aligned} U &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \\ a^2 + b^2 + c^2 &> R^2. \end{aligned}$$

Oznaczmy funkcję podcałkową przez  $f$  w całce oraz stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy

$$(116.2) \quad U = f(M)V$$

gdzie  $V$  oznacza objętość ciała

$$(116.3) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

a  $M$  oznacza punkt

$$(116.4) \quad M(\xi, \eta, \zeta)$$

który jest wewnętrznym punktem obszaru całkowania.

Objętość ciała  $V$  wynosi

$$(116.5) \quad \frac{4}{3}\pi R^3$$

Należy oszacować funkcję  $f$  w domkniętej kuli

$$(116.6) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

We wnętrzu kuli (116.6) funkcja postaci

$$(116.7) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{f(x, y, z)} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \varrho(P, A)$$

gdzie

$$(116.8) \quad P = (x, y, z), \quad A = (a, b, c)$$

nie przyjmuje wartości ekstremalnych ze względu na warunek

$$(116.9) \quad a^2 + b^2 + c^2 > R^2$$

Wobec tego funkcja (116.7) przyjmuje wartości największe i najmniejsze na granicy obszaru całkowania czyli na sferze

$$(116.10) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

W celu wyznaczenia tych wartości zastosujemy metodę mnożników Lagrange'a (patrz J. Gawinecki, Matematyka dla ekonomistów, Warszawa 2010 str. 329–304).

Utworzymy funkcję Lagrange'a postaci

$$(116.11) \quad F(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

oraz wyznaczmy punkty ekstremalne tej funkcji. Mamy

$$(116.12) \quad F'_x = \frac{x-a}{\varrho} + 2\lambda x, \quad F'_y = \frac{y-b}{\varrho} + 2\lambda y, \quad F'_z = \frac{z-c}{\varrho} + 2\lambda z$$

z warunków

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0$$

przy ograniczeniu danym równaniem

$$(116.13) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

wyznaczamy  $\lambda$  oraz ekstremalne punkty  $M_1$  i  $M_2$

$$(116.14) \quad \lambda = \pm \frac{1}{2R}, \quad M_1 = \left( \frac{Ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{Rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{Rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right),$$

$$M_2 = \left( -\frac{Ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{Rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{Rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

Ponieważ  $\varphi(M_1)$  i  $\varphi(M_2)$  dane są wzorami

$$(116.15) \quad \begin{aligned} \varphi(M_1) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + R^2} - 2R\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R, \\ \varphi(M_2) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + R^2} + 2R\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R. \end{aligned}$$

to prawdziwe są nierówności, które można zapisać w postaci

$$(116.16) \quad \begin{aligned} \varphi(M_1) &< \varphi(\xi, \eta, \zeta) < \varphi(M_2), \\ |\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}| &< R. \end{aligned}$$

Oznaczając przez  $\theta$  wyrażenie postaci

$$(116.17) \quad \theta = \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{R}$$

gdzie

$$(116.18) \quad |\theta| < 1$$

otrzymamy

$$(116.19) \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R\theta,$$

stąd

$$(116.20) \quad \begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\varphi(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + R\theta}}, \\ &\iint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \\ &= \frac{4\pi R^2}{3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + R\theta}}. \end{aligned}$$

**Zadanie 117.** (s. 144 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem wewnętrznym zbioru  $V$ , a  $U$  niech będzie kulą o promieniu  $\varepsilon$  oraz o środku w punkcie  $P$ .

Na mocy twierdzenia o wartości średniej oraz korzystając z warunków zadania otrzymujemy

$$(117.1) \quad 0 = \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \iiint\limits_{U_\varepsilon} f(x, y, z) dxdydz = f(\bar{P}), \quad \text{gdzie } \bar{P} \in U_\varepsilon$$

Ściągając kulę  $U_\varepsilon$  do punktu  $P$  otrzymujemy

$$(117.2) \quad f(P) = 0$$

Z tego wynika, że funkcja  $f$  jest równa zero w  $\forall$  wewnętrznym punkcie zbioru  $U$ .

Na mocy ciągłości funkcji  $f$  w domkniętym obszarze  $V$  będzie ona równa zero również na granicy obszaru tzn. w  $\forall$  punkcie obszaru  $V$ .

q.e.d.

**Zadanie 118.** (s. 144 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

**Ad 118 a).** Przejdziemy w całce  $F(t)$  do sferycznych współrzędnych.

Uwzględniając, że

$$(118.1) \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq t \quad (t > 0)$$

otrzymujemy

$$(118.2) \quad F(t) = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \varrho^2 f(\varrho^2) d\varrho = 4\pi \int_0^t \varrho^2 f(\varrho^2) d\varrho$$

Różniczkując względem  $t$  dostajemy

$$(118.3) \quad F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

**Ad 118 b).**

Zapiszmy funkcję  $F(t)$  w postaci całki potrójnej

$$(118.4) \quad F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t f(xyz) dz$$

oraz obliczymy pochodną tej funkcji względem  $t$

$$(118.5) \quad \begin{aligned} F'(t) &= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \left( \int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t f(xyt) dy \right) \\ &= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xyt) dy. \end{aligned}$$

Uwzględniając różniczkowalność funkcji  $f$  możemy zastosować do całki wewnętrznej wzór na całkowanie przez części kładąc

$$(118.6) \quad dv = dz, \quad u = f(xyz)$$

otrzymamy

$$(118.7) \quad \int_0^t f(xyz) dx = tf(xyt) - \int_0^t z d_z(f(xyz)) = tf(xyt) - \int_0^t xyz f'(xyz) dz$$

Zatem funkcje  $F$  możemy zapisać w postaci

$$(118.8) \quad F(t) = t \int_0^t dx \int_0^t f(xyt) dy - \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz$$

Przechodząc do całek potrójnych mamy

$$(118.9) \quad F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dy = \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dx$$

oraz stosując do całek wewnętrznych wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

$$(118.10) \quad \begin{aligned} F(t) &= t \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz - \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dy, \\ F(t) &= t \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz - \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dx. \end{aligned}$$

dodając stronami lewe i prawe części wzorów (118.9) i (118.10) oraz biorąc pod uwagę wzór (118.5) dostajemy

$$(118.11) \quad \frac{3}{t} \left( F(t) + \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz \right) = F'(t).$$

Oznaczając przez  $V$  zbiór postaci

$$(118.12) \quad V = \{0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\} \quad \text{przy } t > 0$$

ostatecznie dostajemy

$$(118.13) \quad F'(t) = \frac{3}{t}(F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz).$$

**Zadanie 119.** (s. 144 tom I. Elementy teorii pola i jej zastosowania.)

Przejdziemy do współrzędnych sferycznych oraz dokonamy zamiany całki podwójnej całkami iterowanymi. Wówczas otrzymamy

$$(119.1) \quad I = \int_0^\pi \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta \int_0^1 \varrho^{m+n+p+2} d\varrho$$

Niech

$$(119.2) \quad p = 2k + 1$$

Wówczas

$$(119.3) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi d\varphi &= \int_0^\pi \sin^{m+n+1} \varphi \cos^{2k} \varphi d(\sin \varphi) \\ &= \int_0^\pi \sin^{m+n+1} \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^k d(\sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

a to znaczy, że

$$(119.4) \quad I = 0$$

Jeśli

$$(119.5) \quad n = 2n' + 1 \quad (n' - \text{jest liczbą naturalną})$$